

1a

Nullstellen

$$f_k(x) = 0$$

$$(x^2 + 1 - k) \underset{\substack{\downarrow \\ > 0}}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - k = 0$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{k-1} \quad \text{mit } \underline{k \geq 1}$$

2 NS $\Rightarrow N_1 (\sqrt{k-1}/0); N_2 (-\sqrt{k-1}/0)$ für $k > 1$

1 NS $\Rightarrow N(0/0)$ für $k = 1$

keine NS für $k < 1$

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - k \rightarrow +\infty}{e^x \rightarrow 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - k \rightarrow +\infty}{e^x \rightarrow +\infty} = 0 \quad (+), \text{ da } e\text{-Funktion schneller als jede Potenzfunktion gg. } \infty \text{ strebt}$$

b) kein Schnittpunkt

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \quad \text{mit } k_1 \neq k_2$$

$$\frac{x^2 + 1 - k_1}{e^x} = \frac{x^2 + 1 - k_2}{e^x} \quad | \cdot e^x (> 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$$

$$x^2 + 1 - k_1 = x^2 + 1 - k_2$$

$$\underline{k_1 = k_2}$$

\Rightarrow Widerspruch zur Annahme dass $k_1 \neq k_2$

\Rightarrow 2 verschiedene Graphen G_k schneiden sich nicht q. z. d.

2 Graphen G_k können einander beliebig nahe

es muss gelten: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_{k_1}(x) - f_{k_2}(x)) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 1 - k_1)e^{-x} - (x^2 + 1 - k_2)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k_2 - k_1}{e^x \rightarrow \infty} = 0 \text{ q. z. d.}$$

c) waagrechte Tangente:

$$f'_k(x) = 0$$

\Rightarrow 1. Ableitung bilden (mit Produktregel): $f_k(x) = \underbrace{(x^2+1-k)}_{v(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{u(x)}$

$$f'_k(x) = \underbrace{2x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{u(x)} + \underbrace{(x^2+1-k)}_{v(x)} \cdot \underbrace{e^{-x} \cdot (-1)}_{u'(x)} \quad \text{Nachdifferenzieren!!}$$

$$= e^{-x} (-x^2 + 2x - 1 + k)$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-x}}_{>0} (-x^2 + 2x - 1 + k) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1+k)}}{-2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4k}}{-2} = \underline{\underline{1 \pm \sqrt{k}}}$$

Mindestens 1 waagrechte Tangente \Rightarrow mind. eine Lösung $\Rightarrow D \geq 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k \geq 0}}$$

Punkte mit waagrecht Tangente ($k \geq 0$)

$$f_k(1+\sqrt{k}) = \underline{(2+2\sqrt{k})} e^{-1-\sqrt{k}} \rightarrow P_1(1+\sqrt{k} / (2+2\sqrt{k}) e^{-1-\sqrt{k}})$$

$$f_k(1-\sqrt{k}) = \underline{(2-2\sqrt{k})} e^{-1+\sqrt{k}} \rightarrow P_2(1-\sqrt{k} / (2-2\sqrt{k}) e^{-1+\sqrt{k}})$$

$$\Rightarrow w(1+\sqrt{k}) = 2(1+\sqrt{k}) \cdot e^{-1-\sqrt{k}} = \underline{(2+2\sqrt{k})} e^{-1-\sqrt{k}}$$

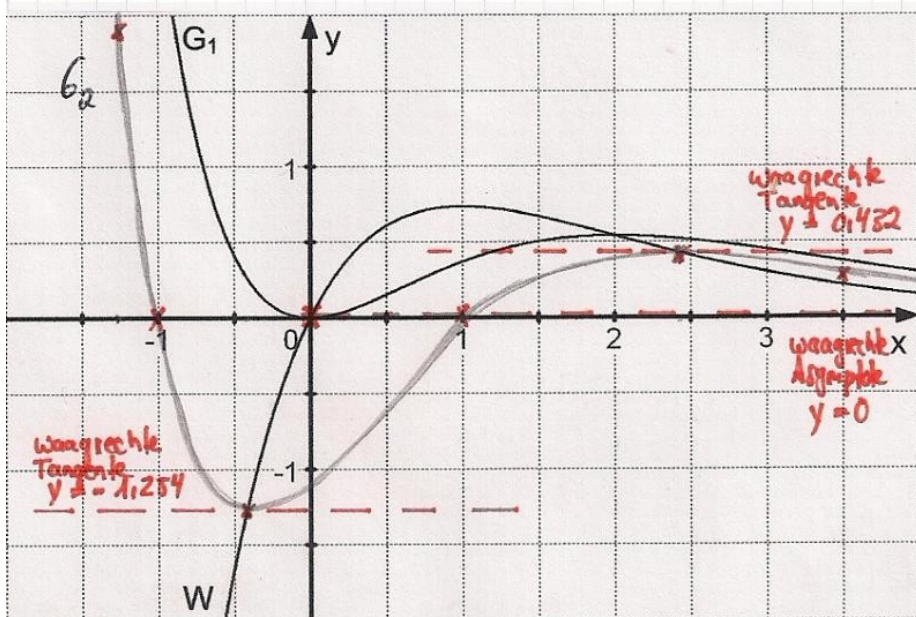
$$w(1-\sqrt{k}) = 2(1-\sqrt{k}) \cdot e^{-1+\sqrt{k}} = \underline{(2-2\sqrt{k})} e^{-1+\sqrt{k}} \quad \text{q.e.d.}$$

d) $k=2$

No/I Stellen: $N_1(1/0)$; $N_2(-1/0)$

waagrechte Tang: $P_1(2,414 / 0,432)$; $P_2(-0,414 / -1,254)$

Zusätzlich: $A(-1,25 / 1,963)$; $B(3,5 / 0,340)$



e)

$$\begin{aligned}\underline{\omega(x) - f'_n(x)} &= 2xe^{-x} - e^{-x}(-x^2 + 2x - 1 + 4) = e^{-x}(2x + x^2 - 2x + 1 - 4) \\ &= (x^2 + 1 - 4)e^{-x} = \underline{f_n(x)} \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Flächeninhalt:

$$\left| \int_0^{\infty} f_n(x) dx \right| \stackrel{!}{=} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\int_0^b \omega(x) - \int_0^b f'_n(x) dx \right]$$

zunächst: Stammfunktion bestimmen

$$\textcircled{1} \int \omega(x) dx = \int \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v(x)} dx \stackrel{(*)}{=} \underbrace{-2x \cdot e^{-x}}_{u(x) \cdot v(x)} - \int \underbrace{(-2e^{-x})}_{u'(x) \cdot v(x)} dx$$

(*) Partielle Integration

$$u(x) = 2x \quad v'(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = 2 \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= \underline{\underline{-2e^{-x}(x+1) + c}}$$

$$\textcircled{2} \int_x f'_n(x) dx \stackrel{!}{=} f_n(x) + c = \underline{\underline{x^2 e^{-x} + c}}$$

Jetzt

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{\left[-2e^{-x}(x+1) \right]_0^b}_{-\infty} - \underbrace{\left[\frac{x^2}{e^x} \right]_0^b}_{\frac{b^2}{e^b}} \right\} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-2e^{-b}(b+1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 - \left(\frac{b^2}{e^b} - 0 \right) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{-2(b+1)}{e^b}}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \rightarrow 0^-}} + 2 - \underbrace{\frac{b^2}{e^b}}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \rightarrow 0^+}} \right) = \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

da die e-Funktion schneller gegen ∞ strebt
als jede Potenzfunktion gg $\pm \infty$

2a

Geburten im Jahr 2003: $\frac{22}{1000} \cdot \underbrace{6,274 \cdot 10^9}_{\text{Dev. zu Beginn 2003}} = 1,38028 \cdot 10^8$

→ Geburten pro Minute: $\frac{1,38028 \cdot 10^8}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Tage}}}{365} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Std.}}}{24} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Min.}}}{60}} \approx 262,6 \approx \underline{\underline{263}}$

Bevölkerung zu Beginn 2004:

$6,274 \cdot 10^9 + \frac{(22-9) \cdot 6,274 \cdot 10^9}{1000} = \underline{\underline{6,356 \cdot 10^9}}$

b) a) $N(2004) = N(2003) \cdot a^1$
 $a = \frac{N(2004)}{N(2003)} = \underline{\underline{1,013}}$

j) $N(2003) \cdot 1,013^{j-2003} > 9 \cdot 10^9 \quad | : N(2003)$
 $1,013^{j-2003} > \frac{9 \cdot 10^9}{6,274 \cdot 10^9} \quad | \ln$ (streng mon. steigend)

Log. regel:
 $\ln u^2$
 2 ln u

→ $(j-2003) \ln 1,013 > \ln 1,434 \quad | : \ln 1,013$
 $j-2003 > \frac{\ln 1,434}{\ln 1,013} \quad | + 2003$
 $j > 2030,9$

→ zu Ende des Jahres 2030 würde die Zahl von 9 Mrd. Menschen überschritten werden

c) $N'(j) = \underbrace{N(2003) \cdot 1,013^{j-2003}}_{N(j)} \cdot \ln 1,013$
 $= \underline{\underline{N(j) \cdot \ln a}}$